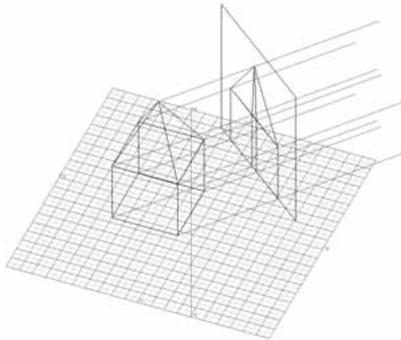
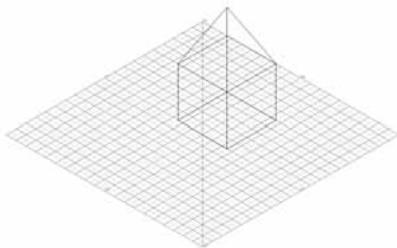


Glossar zur Geometrie

Die Perspektive geht von der grundlegenden menschlichen Erfahrung des räumlichen Sehens aus, daß weit entfernte Dinge kleiner wirken als nahe und parallele Geraden, die sich in Wirklichkeit nicht schneiden (z. B. zwei lange Wände oder die Begrenzung einer Straße), sich irgendwo in weiter Ferne doch zu berühren scheinen. Aus diesem Erfahrungswissen wurde in der Renaissance die Zentralperspektive entwickelt. Bei ihrer Erstellung schnitten sich anfänglich sämtliche Fluchtlinien in einem horizontal in der Mitte des Bildes befindlichen Fluchtpunkt (Ein-Punkt-Perspektive). Die Konstruktion erfolgte rein anschaulich durch vor und hinter dem Bild plazierte Aug- bzw. Fluchtpunkte. Je nach Anzahl und Lage der Fluchtpunkte spricht man von Ein-, Zwei- und Dreipunktperspektiven. Die Perspektive sprengte die Vorstellungen der euklidischen Geometrie, da aus perspektivischen Ansichten keine Maße zu entnehmen und parallele Linien nicht immer parallel waren.



Bei der Parallelprojektion gehen von allen Punkten des Objekts parallele Projektionsstrahlen aus. Das Projektionszentrum liegt dabei in einem uneigentlichen Punkt (im Unendlichen). Auf der Projektionsebene entsteht durch das Verbinden der Durchstoßpunkte der Projektionsstrahlen die Projektion des Objekts.



Die isometrische Axonometrie entsteht, indem die Projektionsebene der Parallelprojektion zu keiner der Koordinatenebenen mehr senkrecht steht. Die Senkrechte der Projektionsebene bildet mit allen Koordinatenachsen den gleichen Winkel, wodurch die Verkürzungen auf allen Achsen gleich groß sind. Die Projektionsstrahlen schneiden die Projektionsebene unter einem Winkel von 90° .

Projektive Geometrie

Die Projektive Geometrie entwickelte sich aus der Perspektive. Allgemein gesprochen geht es der projektiven Geometrie um die Formulierung von Gesetzmäßigkeiten für die Abbildung einer Figur (Punkt, Fläche, Volumen etc.) auf eine andere Figur. Derartige Operationen werden auch als projektive Transformationen bezeichnet. Wichtiges Charakteristikum der projektiven Geometrie sind die bei der Projektion invarianten (unveränderlichen) Eigenschaften, die es ermöglichen, daß transformierte Körper erkennbar bleiben. So bleibt beispielsweise eine verbundene Linie auch in der Projektion mit ihrer benachbarten Linie verbunden. Die bei der Konstruktion von Perspektiven verwendeten Techniken und Punkte werden mit dem Erfolg verallgemeinert und systematisiert, daß auch weitere, nicht an das perspektivische Bild gebundene Abbildungen möglich werden.

Die Konstruktion einer perspektivischen Abbildung wurde früher mit Hilfskonstruktionen vor und hinter der Bildebene veranschaulicht. Mit der projektiven Geometrie erfolgt sie innerhalb des Bildes. Die Bildebene der Perspektive kann sich folglich frei im Raum bewegen. Entsprechend liegt der 'Augenpunkt' der Perspektive – in der projektiven Geometrie als Projektionszentrum bezeichnet – nicht mehr notwendigerweise vor der Bildebene. Er kann prinzipiell jeden Punkt im Raum einnehmen.

Die Fluchtpunkte paralleler Geraden liegen auch nicht mehr unbedingt auf einer 'horizontal' verlaufenden Horizontlinie, sondern auf einer durch die Projektionsebenen erzeugten Geraden im Raum. Diese Schnittgerade kann dabei theoretisch jede Position im Raum einnehmen oder – bei der Parallelprojektion – im Unendlichen liegen.

Die Parallelprojektion, d. h. die verzerrungsfreie Projektion eines Körpers auf eine Bildebene mittels paralleler Sehstrahlen, wird durch die Sätze der projektiven Geometrie ein Sonderfall der Zentralperspektive. Möglich wird dies durch die Definition von 'uneigentlichen' oder 'unendlich fernen' Punkten, Geraden und Ebenen. In einem uneigentlichen Punkt schneiden sich zwei parallele Geraden, in der uneigentlichen Geraden schneiden sich zwei parallele Ebenen. Die uneigentliche Ebene wird durch die uneigentlichen Punkte und Geraden gebildet. Über diese 'uneigentlichen' – in Wirklichkeit nicht vorhandenen – geometrischen Elemente wird das 'Unendliche', das für die euklidische Geometrie nicht erreichbar war, für die projektiven Räume verwendbar, und wird es möglich, auch den Sonderfall der parallelen Linien und Ebenen nach den nunmehr allgemeingültigen Sätzen der projektiven Geometrie zu behandeln.

Mit solchen Vereinbarungen für projektive Transformationen umgeht man auch das alte Problem der frühen Entwickler der Zentralperspektive, die methodisch kaum erklären konnten, warum sich der gedachte Strahlengang vor und hinter dem Bild identisch jeweils in einem Punkt schneidet. Durch die Methodisierung der projektiven Geometrie, bei der die Zentralperspektive jetzt nur noch ein Spezialfall projektiver Transformation ist, wird der im Allgemeinfall unterschiedliche Charakter des Strahlengangs auf beiden Seiten der Projektionsebene deutlich.

Auch die Konstruktion komplexerer Formen in der Projektion wird durch die Methodisierung der Transformationen ermöglicht. Es ist daher nachvollziehbar, daß nach ersten anschaulichen Formulierungen durch Piero della Francesca Ende des 15. Jahrhunderts und der ersten Formulierung von Sätzen der projektiven Geometrie durch Girard Desargues im 17. Jahrhundert die projektive Geometrie für weitere Anwendungen weiterentwickelt wurde.

Eine Schlüsselrolle spielen dabei die Arbeiten von Gaspard Monge und Jean-Victor Poncelet im 18./19. Jahrhundert an der École Polytechnique in Paris. Durch die Aufklärung entstand ein starkes Interesse an rationalisierten Darstel-

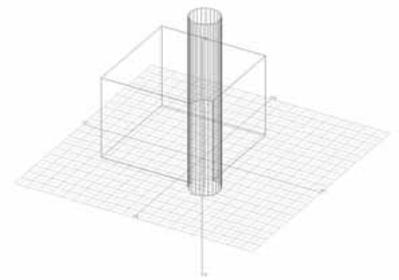
lungsverfahren für technische Produkte, um Aufbau und Eigenschaften dieser Produkte kommunizieren zu können. Als Spezialfall der projektiven Geometrie entwickelte sich daher die darstellende oder deskriptive Geometrie, deren grundlegendes Verfahren die orthographische oder Drei-Tafel-Projektion ist. Dafür wird das darzustellende Objekt mit Grundriß, Vorder- und Seitenansicht auf drei jeweils im Winkel von 90° zueinander stehende Zeichenebenen projiziert. Je nach Ort dieser Zeichenebenen lassen sich auch Schnitte und Durchdringungen untersuchen und komplexe geometrische Körper auf relativ einfache Art und Weise mit den für die Konstruktion notwendigen Ansichten darstellen. Die Drei-Tafel-Projektion ist deshalb bis heute eine Grundlage des Ingenieurbaus und der Maschinenkonstruktion. Mit ihr stand erstmals ein Darstellungsverfahren zur Verfügung, das im Gegensatz zu Vorläufern wie der Stereotomie relativ leicht erlernbar war. Durch die Zuhilfenahme der drei Ansichten können räumliche Informationen ohne Verzerrungen der Maße in einer Zeichnung enthalten sein.

Analytische Geometrie

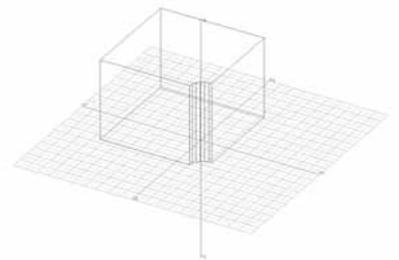
Die analytische Geometrie stellt die Verbindung der (projektiven) Geometrie zur Analysis her. Schon früh formulierte René Descartes Eigenschaften des euklidischen Raumes analog zum Zahlenraum, durch die der euklidische Raum mathematisch faßbar wurde. Grundlegend für die Übertragung von mengen- und zahlentheoretischen Operationen aus der Algebra auf die Geometrie sind die Untersuchungen, die im Bereich geometrischer Metrik angestellt werden – Lage, Proportion, Größenbeziehungen und Maße von Punkten und geometrischen Figuren im Raum. Auf diese Weise gelangt man einerseits zu einer graphischen Darstellung der jeweiligen Operation und kann andererseits algebraische Verfahren zur Generierung geometrischer Körper verwenden. Dieses Kalkül wurde durch das Kartesische Koordinatensystem nutzbar gemacht, welches jedoch nicht durch Descartes, sondern durch die Geometer der École Polytechnique entwickelt wurde. Der Raum, dessen Eigenschaften durch Descartes beschrieben worden waren, wurde nun durch das Koordinatensystem mit seinen drei Skalen auch graphisch und numerisch darstellbar gemacht. Das Werkzeug des Koordinatengitters erwies sich durch die Vereinfachung und Methodisierung – ähnlich wie die Drei-Tafel-Projektion in der projektiven Geometrie – als nützliches, leicht zu handhabendes Werkzeug. Die Konstruktion und Projektion von Objekten und Punkten im dreidimensionalen Raum konnte nun durch Zahlenangaben und algebraische Verfahren unterstützt werden. Zu den wichtigen Anwendungsfeldern gehört der Entwurf komplex gekrümmter Körper wie beispielsweise Schiffsrümpfe oder später auch Flugzeugtragflächen. Erst das Hilfsmittel des kartesischen Koordinatensystems und passende algebraische Gleichungssysteme (Splines) ermöglichten methodische Formfindung und die Übermittlung dieser Formen an die industrielle Fertigung.

Nachdem die wichtigsten Erkenntnisse über geometrische Fragestellungen im 18. und 19. Jahrhundert dokumentiert worden waren, spielte die Geometrie in der mathematischen Theorie bis in die Zeit nach dem Zweiten Weltkrieg eher eine Außenseiterrolle. Zwar wurden z. B. durch die Arbeiten von David Hilbert und anderen wichtige Überlegungen zur Differentialgeometrie und Topologie angestellt, die insbesondere für Anwendungen und Visualisierungen in der modernen Physik von Bedeutung sind, doch war dies fast ausschließlich ein Thema für die naturwissenschaftliche und mathematische Fachöffentlichkeit. Beispielsweise werden in der Differentialgeometrie Verfahren aus der Integral- und Differentialrechnung auf geometrische Fragestellungen angewandt. Entsprechend spielt hier weniger die gesamte Form des Körpers die zentrale Rolle als vielmehr das Verhalten einer Figur in der Nähe bestimmter Punkte. Auf diese Weise können komplex gekrümmte Körper (Mannigfaltigkeiten) wie Regel- und Minimalflächen (Seifenhäute) bestimmt werden. Eng verwandt ist das Gebiet der Topologie, in dem man sich für den Zusammenhang zwischen den Punkten einer Figur interessiert. Die Frage der Metrik (Abmeßbarkeit von Strecken und Winkeln) spielt dabei im Gegensatz zur euklidischen Geometrie keine Rolle.

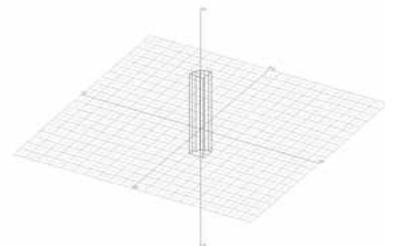
Die Darstellungen aus diesen Gebieten sind räumlich schwer vorstellbar und kompliziert zu zeichnen. Erst mit der Weiterentwicklung der Computertechnik und dem Beginn der Computergrafik erlebte die Geometrie eine 'Wiederentdeckung'. In direktem Zusammenhang mit der Computergrafik steht die konstruktive Geometrie, die sich mit der algorithmischen Beschreibung von geometrischen Transformationen beschäftigt. Sie ist die Grundlage für die Bearbeitung von Aufgabenstellungen aus der projektiven und analytischen Geometrie mit dem Computer. Perspektiven von Körpern, die früher langwierig konstruiert werden mußten, kön-



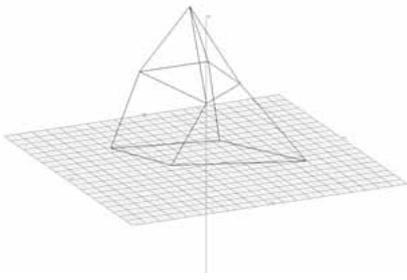
Ein Verfahren der analytischen Geometrie sind die sog. Booleschen Operationen. Hierbei werden die Operationen der Mengenlehre auf Volumina übertragen. Bei der Vereinigungsmenge entsteht ein Körper, in den die beteiligten Körper verschmolzen werden.



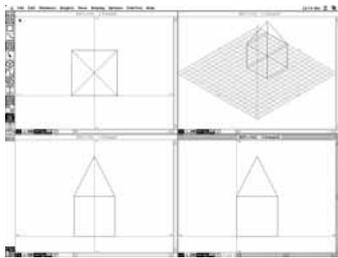
Bei der Differenz-Operation wird ein Volumen von dem anderen abgezogen. Es bleibt der Teil des ersten Volumens (Quader) zurück, der nicht von dem zweiten (Zylinder) berührt wurde.



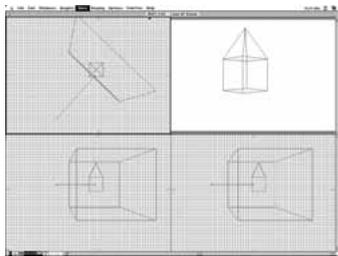
Das Ergebnis der Schnittmengen-Operation ist das Volumen, das vorher Teil beider Körper war.



Durch das Verschieben einzelner Eckpunkte erhält das Beispielhaus eine völlig andere Form, obgleich seine topologischen Eigenschaften gleich bleiben. Erst wenn man Punkte entfernen oder Strecken unterbrechen würde, wäre die topologische Integrität zerstört.



Durch die vier Arbeitsfenster kann man einerseits auf allen Arbeitsebenen konstruieren, andererseits erhält man aber auch zur Kontrolle permanent einen räumlichen Eindruck des entworfenen Objekts durch eine axonometrische Darstellung.



Durch Verändern der virtuellen Kamera steuert man die perspektivische Ansicht des Objekts. Man kann sich um das Objekt herum bewegen und einen günstigen Standpunkt für die Betrachtung des Objekts finden.

nen vom Computer durch die Anwendung von Transformationsmatrizen auf numerischem Wege in Sekundenschnelle errechnet werden. Durch diese Fähigkeit, projektive Transformationen praktisch in Echtzeit durchzuführen, kann man am Rechner in einem 'virtuellen', dreidimensionalen Raum arbeiten.

Computer Aided Architectural Design

Im aktuellen CAAD (Computer Aided Architectural Design) spielen im Gegensatz zum klassischen Architektorentwurf oder dem konventionellen CAD nicht mehr Pläne und Ansichten die zentrale Rolle. Statt dessen wird ein dreidimensionales Datenmodell des Gebäudeentwurfs am Computer entwickelt. Das Modelling ist aufgrund seines räumlichen Charakters mehr mit der Erstellung eines Modells aus Holz oder Styrodur zu vergleichen als mit dem Anfertigen einer Architekturzeichnung, die ja bereits die methodische Abstraktion eines räumlichen Gebildes darstellt. Dazu wird jedes Objekt durch Bestimmung seiner Koordinaten in einem dreidimensionalen, meist kartesischen Koordinatensystem numerisch beschrieben. In diesem Datensatz ist der Kontext der Entstehung, Verbindung und 'Verwandtschaft' eines Objektes mit anderen Elementen enthalten. Es lassen sich Bedingungen setzen wie die, daß sich z.B. ein Raum immer an der Außenwand aufhalten soll, egal wie sich der Grundriß des Gebäudes verändert. Alle diese Eigenschaften werden bei Veränderungen des Entwurfs so lange durch das Programm erhalten, bis der Nutzer diese Verbindungen löst.

Transformationen von Formen und Räumen, wie sie aus der analytischen Geometrie bekannt sind, können durch spezielle Werkzeuge innerhalb der Modelling-Programme ausgeführt werden, so daß man auch sehr komplexe Formen generieren und für den Entwurf nutzen kann: Beispielsweise erlauben die Verfahren der 'angewandten Topologie' die flexible Manipulierung von Objektgeometrien. Durch Bewegung einzelner Punkte läßt sich ein regelmäßiger Kubus schnell in ein unregelmäßiges Polyeder mit acht Seitenflächen verzerren, ohne daß seine topologischen Eigenschaften verändert werden. Von großer Bedeutung ist, daß die Programme genaue geometrische Informationen wie Position von Punkten, Volumina, Schwerpunkte etc. über diese komplex geformten Objekte liefern, was die Voraussetzung für eine weitere Bearbeitung in Berechnungs- und Fertigungsanwendungen darstellt.

Navigation im virtuellen Entwurfsraum

Da die gewöhnlichen Ein- und Ausgabemedien wie Maus und Bildschirm lediglich zweidimensional sind, müssen Verfahren bereitgestellt werden, die eine Navigation im dreidimensionalen Computermodell ermöglichen. Dabei macht man sich die Transformationen der projektiven und konstruktiven Geometrie zunutze. Weit verbreitet ist das Arbeiten mit einer 'Vier-Fenster-Ansicht'. Neben den Ansichten der orthogonalen Drei-Tafel-Projektion wird (Grundriß, Vorder- und Seitenansicht) zusätzlich ein Fenster mit einer räumlichen Ansicht (Perspektive oder Axonometrie) dargestellt. Alle Fenster können genutzt werden. Dadurch sind die drei Dimensionen als maßgetreue Ansicht für die Bearbeitung des Entwurfs vorhanden. Zusätzlich steht die räumliche Projektion zur Verfügung, um die dreidimensionale Disposition des Objekts zu kontrollieren. Für das Zeichnen kann über frei im Raum anzuordnende Referenzebenen jeder Punkt im Raum erreicht und auf jeder denkbaren Bezugsfläche konstruiert werden. Die räumliche Ansicht kann um beliebige Punkte gedreht und damit das modellierte Objekt von allen Seiten angeschaut werden. Spezielle Perspektiven lassen sich durch virtuelle Kameras mit detailliert einstellbaren Positionen und Eigenschaften erstellen. Indem man diese Kameras bewegt, erhält man den Eindruck, durch das Objekt hindurchzufliegen. Auf diesem Weg ist eine genaue visuelle Überprüfung des dynamischen Raumeindrucks möglich. Diese Kameras lassen sich auch nach bestimmten Vorgaben und Pfaden durch das Objekt bewegen, so daß man einen Animationsfilm produzieren kann. Damit verliert der Fluchtpunkt der Perspektive vollständig seinen statischen Charakter. Durch Lichtberechnungsverfahren wird nicht nur ein realistisch wirkender Raumeindruck simuliert, sondern werden auch Materialien, Farben, Licht, Schatten, Transparenzen etc. nachgebildet (Rendering). Das Verfahren des Ray-Tracing (Strahlverfolgung) arbeitet dabei ähnlich wie Perspektivkonstruktionen: Wie bei einer Lichtgeometrie berechnen die Programmgorithmen den Weg der Lichtstrahlen vom virtuellen Auge zu den Lichtquellen mitsamt aller Reflexionen an den unterschiedlichen Körpern.